Metodi Computazionali della Fisica
Secondo Modulo: C++

Quinta Lezione

La lezione di oggi

Obiettivo:

- utilizzare la routine `Vegas` per il calcolo della vita media del neutrone.

Lo spazio delle fasi in meccanica classica

Il concetto di spazio delle fasi fu introdotto da Gibbs e rappresenta lo spazio di tutti i possibili stati di un sistema dove ogni stato possibile è rappresentato da un unico punto. Nel caso di un sistema meccanico lo spazio delle fasi è definito da tutti i possibili valori di posizione e momento. Quando, ad esempio, si calcola la funzione di partizione di un sistema

$$Z = \frac{1}{N!\, h^{3N}} \int \exp[-\beta H(p_1 \cdots p_N, x_1 \cdots x_N)] \, \mathrm{d}^3 p_1 \cdots \mathrm{d}^3 p_N \, \mathrm{d}^3 x_1 \cdots \mathrm{d}^3 x_N$$

l'integrale è calcolato sullo spazio delle fasi del sistema.

Lo spazio delle fasi in teoria dei campi

Lo spazio delle fasi di n particelle con momenti $p_1, \ldots, p_n$ e masse $m_1, \ldots, m_n$ è dato da

$$\begin{aligned} d\Phi_n(P, p_1, .., p_n) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^3} \Theta(p_i^0) \delta(p_i^2 - m_i^2) (2\pi)^4 \delta^4 \left(P - \sum_{i=1}^{n} p_i \right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^4 \left(P - \sum_{i=1}^{n} p_i \right). \end{aligned}$$

Nel limite di particelle senza massa $m_1 = ... = m_n = 0$

$$\Phi_n = \int d\Phi_n = (2\pi)^{4-3n} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} \frac{(P^2)^{n-2}}{\Gamma(n)\Gamma(n-1)}. \qquad (1)$$

Il decadimento del neutrone - 1

Consideriamo il decadimento

$$n \longrightarrow p\, e\, \bar{\nu}$$

e calcoliamo lo spazio delle fasi. Lo stesso risultato vale anche, ad esempio, per

$$\tau \longrightarrow \mu\, \nu\, \bar{\nu}$$

$$b \longrightarrow c\, e\, \bar{\nu}$$

Il decadimento del neutrone - 2

Lo spazio delle fasi di 3 particelle è dato da

$$d\Phi_3 = \frac{d^3\vec{p}_{\bar{\nu}}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}}} \frac{d^3\vec{p}_e}{(2\pi)^3 2E_e} \frac{d^3\vec{p}_p}{(2\pi)^3 2E_p} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_n - p_{\bar{\nu}} - p_e - p_p) \,.$$

Integrando i gradi di libertà del neutrino ($m_{\bar{\nu}} = 0$) e le variabili angolari, nel sistema di quiete del neutrone troviamo

$$\begin{aligned}\Phi_3 &= \int \frac{2\pi}{2|\vec{p}_e + \vec{p}_p|} \frac{d^3\vec{p}_e}{(2\pi)^3 2E_e} \frac{d^3\vec{p}_p}{(2\pi)^3 2E_p} \delta(m_n - E_e - E_p - |\vec{p}_e + \vec{p}_p|) \\ &= \frac{1}{4|\vec{p}_e + \vec{p}_p|} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{|\vec{p}_e|^2 d|\vec{p}_e|}{E_e} \frac{|\vec{p}_p|^2 d|\vec{p}_p| d\cos\theta_{ec}}{E_p} \delta(m_n - E_e - E_p - |\vec{p}_e + \vec{p}_p|) \,.\end{aligned}$$

Per l'ultima integrazione angolare usiamo la δ riscritta in funzione della variabile angolare rimanente

$$\delta(m_n - E_e - E_p - |\vec{p}_e + \vec{p}_p|) = \frac{|\vec{p}_e + \vec{p}_p|}{|\vec{p}_e||\vec{p}_p|} \delta(\cos\theta_{ep} - \cos\bar{\theta}_{ep}) \,,$$

dove il valore di $\cos\bar{\theta}_{ec}$ è dato dalla soluzione dell'argomento della δ:

$$|\vec{p}_e + \vec{p}_p| = m_n - E_e - E_p \,.$$

$$\cos\bar{\theta}_{ep} = \frac{m_n^2 + m_p^2 + m_2^2 - 2m_n(E_p^2 + E_e^2) + 2E_e E_p}{2\sqrt{E_e^2 - m_e^2}\sqrt{E_p^2 - m_p^2}}$$

Il decadimento del neutrone - 3

Usando l'identià $|\vec{p}_i| d|\vec{p}_i| = E_i dE_i$, troviamo

$$\Phi_3 = \frac{1}{32\pi^3} \int dE_e \, dE_p \, d\cos\theta_{ep} \delta(\cos\theta_{ep} - \cos\bar{\theta}_{ep}) \, . \tag{2}$$

I limiti di integrazione per l'energia dell'elettrone si trovano imponendo i limiti che la sua emissione sia parallela o antiparallela a quella del protone $|\cos\bar{\theta}_{ep}| \leq 1$:

$$E_e^{\pm} = \frac{1}{2}\left[m_n - E_p \pm \sqrt{E_p^2 - m_p^2}\left(1 - \frac{m_e^2}{(p - p_p)^2}\right) - \frac{E_p - m_n}{(p - p_p)^2} m_e^2\right] \, .$$

Il limite inferiore sull'energia del protone è $E_p = m_p$, mentre il limite superiore segue dalla condizione $m_e^2 = (p - p_p)^2 = m_n^2 + m_p^2 - 2m_n E_p$. Il risultato finale è:

$$\Phi_3 = \frac{1}{32\pi^3} \int_{m_n}^{\frac{m_n^2 + m_p^2 - m_e^2}{2m_n}} dE_p \sqrt{E_p^2 - m_p^2}\left(1 - \frac{m_e^2}{m_n^2 + m_p^2 - 2m_n E_p}\right)$$

nel limite $m_e = 0$ diventa

$$\Phi_3 = \frac{1}{32\pi^3} \frac{m_n^2}{8}\left(1 + 2\rho \log\rho - \rho^2\right)$$

con $\rho = \frac{m_p^2}{m_n^2}$ che che nel caso $m_p = 0$ coincide con la eq. (1).

Il decadimento del neutrone - 4

L'integrale della eq. (2) è banale nel caso in cui si voglia calcolare il solo spazio delle fasi, ma diventa complicato quando vogliamo integrare un elemento di matrice per ottenere, ad esempio, il rate totale del decadimento:

$$\tau^{-1} = \int d\Gamma = \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_n} d\Phi_3(p_n; p_p, p_e, p_{\bar{\nu}})$$

Usiamo il caso dello spazio delle fasi a 3 particelle per controllare che l'integrazione sia corretta e poi calcoliamo il rate totale per il neutrone usando il modulo dell'ampiezza della teoria di Fermi

$$|\mathcal{M}|^2 = 64 G_F^2 p_n \cdot p_{\bar{\nu}} p_p \cdot p_e \,,$$

con $m_n = 0.940\ GeV$, $m_p = 0.938\ GeV$, $m_e = 0.0005\ GeV$ e $G_F = 1.167 \times 10^{-5}\ GeV^{-2}$.

Il decadimento del neutrone - 5

Nel sistema di riferimento di quiete del neutrone, dopo aver integrato i gradi di libertà del neutrino con la δ e prendendo l'asse z lungo la direzione del protone, abbiamo:

$$\begin{aligned} p_n \cdot p_{\bar{\nu}} &= m_n \left(m_n - E_e - E_p\right) \\ p_p \cdot p_e &= E_p\, E_e - \sqrt{E_p^2 - m_p^2}\sqrt{E_e^2 - m_e^2}\cos\theta_{ep} \end{aligned}$$